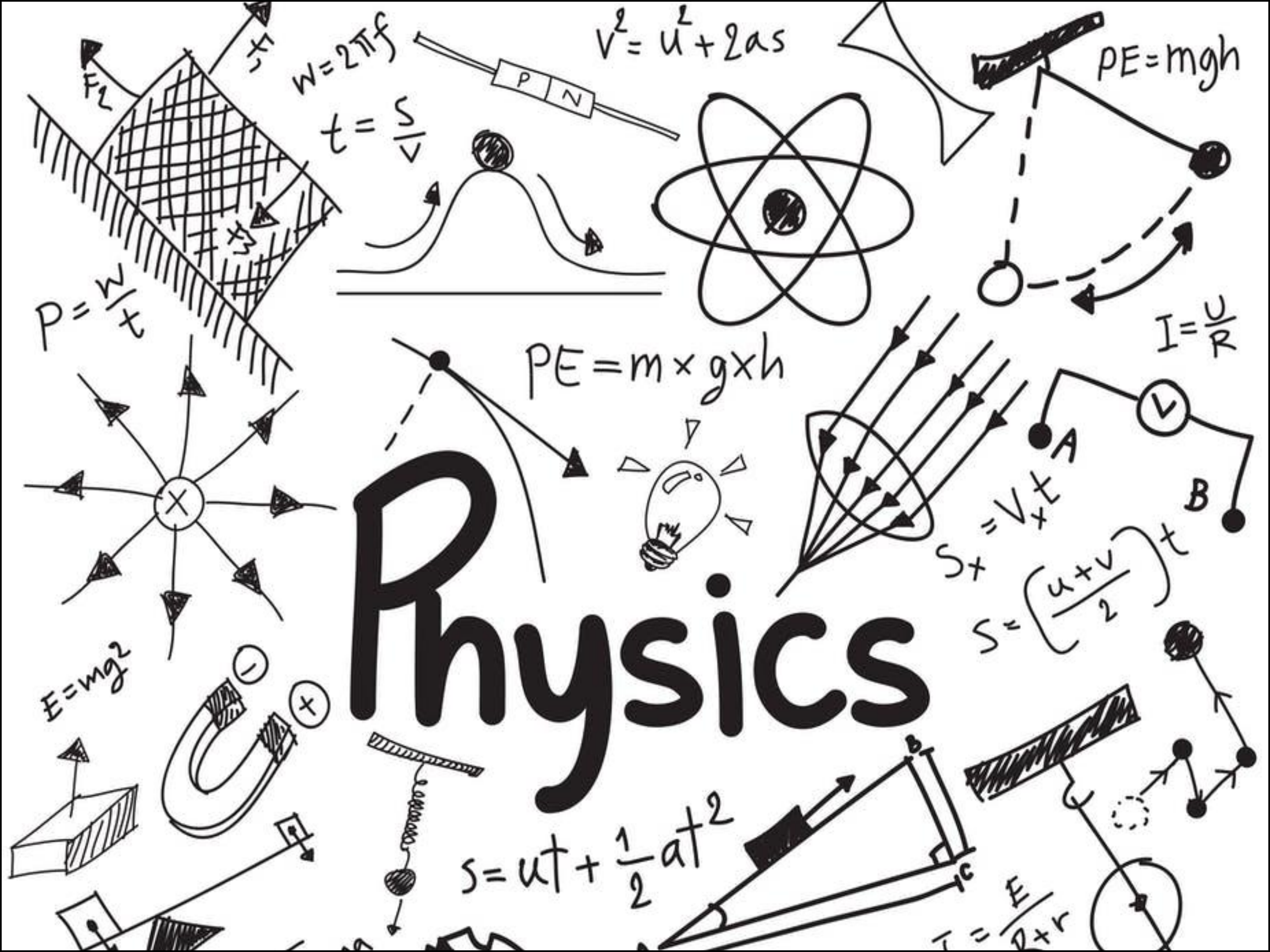

Physics
PE=mgh
PE=m×g×h
V2=u2+2as
W=2πf
P N
t=S/V
P=W/t
I=U/R
A
B
Sx=Vxt
S=(u+v/2)t
E=mg2
S=ut+1/2at2
B
C
F2
F1
F3

Reminder…

- **Διαλέξεις**
  - **Προαιρετική** παρουσία!
  - Είστε εδώ γιατί **θέλετε** να ακούσετε/συμμετέχετε
  - Δεν υπάρχουν απουσίες
  - Υπάρχει <u>**σεβασμός**</u> στους συναδέλφους σας και στην εκπαιδευτική διαδικασία
  - **Προστατέψτε εσάς και τους συναδέλφους σας**: απέχετε από το μάθημα αν δεν είστε/αισθάνεστε καλά

Εικόνα: Σταγόνες νερού που πέφτουν από ύψος επάνω σε μια επιφάνεια νερού προκαλούν την ταλάντωση της επιφάνειας. Αυτές οι ταλαντώσεις σχετίζονται με κυκλικά κύματα που απομακρύνονται από το σημείο που πέφτουν οι σταγόνες.

Φυσική για Μηχανικούς

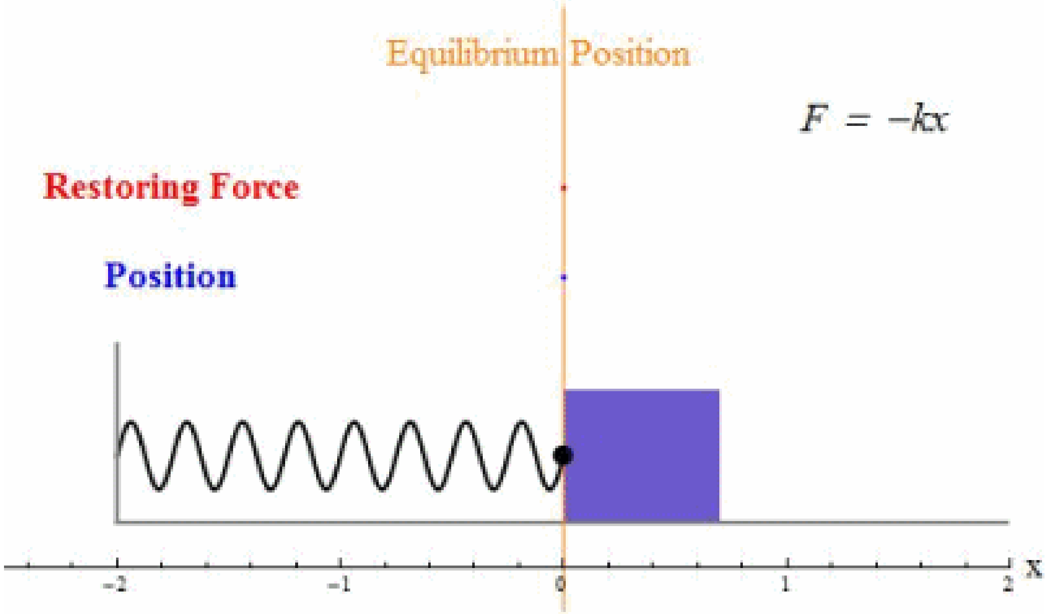
Ταλαντώσεις και Μηχανικά Κύματα

Απλή Αρμονική Ταλάντωση

Απλή Αρμονική Ταλάντωση (review…)

- **<u>Ορισμός:</u> Όταν η δύναμη που ασκείται σε ένα σύστημα είναι ανάλογη της μετατόπισης και έχει πάντα κατεύθυνση προς τη θέση ισορροπίας του συστήματος, η κίνηση που πραγματοποιεί το σύστημα λέγεται**

Απλή Αρμονική Κίνηση / Ταλάντωση



Απλή Αρμονική Ταλάντωση (review…)

- Θέση: $$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$
- Ταχύτητα: $$u(t) = \frac{dx}{dt} = -\omega A\sin(\omega t + \varphi)$$
- Επιτάχυνση: $$a(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi)$$
- Κυκλική συχνότητα: $$\omega = 2\pi f = \sqrt{\frac{k}{m}}$$
- Περίοδος: $$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$
- Συχνότητα: $$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Απλή Αρμονική Ταλάντωση

$$\boldsymbol{x}(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$
$$\boldsymbol{u}(t) = -\omega A\sin(\omega t + \phi)$$

- **Ενέργεια Απλού Αρμονικού Ταλαντωτή**
  - **Κινητική Ενέργεια:**

$$\frac{k}{m}$$

$$K = \frac{1}{2}m\boldsymbol{u}^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$$

$$\frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t + \phi)$$

  - **Ελαστική Δυναμική Ενέργεια:**

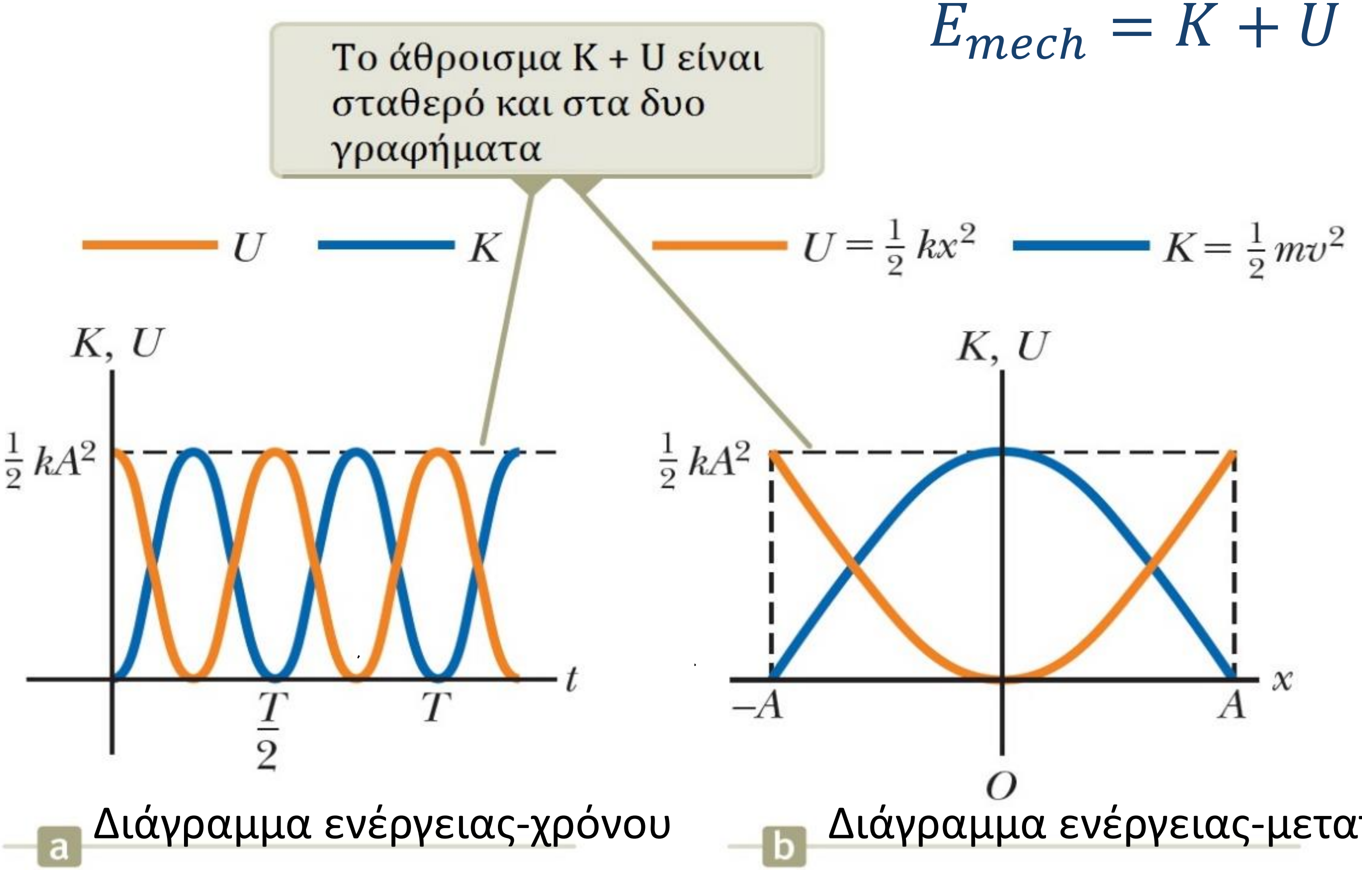
$$U = \frac{1}{2}k\boldsymbol{x}^2 = \frac{1}{2}k\,A^2\cos^2(\omega t + \varphi)$$

- Το σύστημα του ταλαντωτή {ελατήριο, σώμα} είναι απομονωμένο
- Η δύναμη του ελατηρίου είναι εσωτερική & **συντηρητική**!!

Απλή Αρμονική Ταλάντωση

- **Ενέργεια Απλού Αρμονικού Ταλαντωτή**
  - Μηχανική Ενέργεια $K + U$ σταθερή – **ΑΔΜΕ**

$$E_{mech} = K + U = \frac{1}{2}kA^2$$



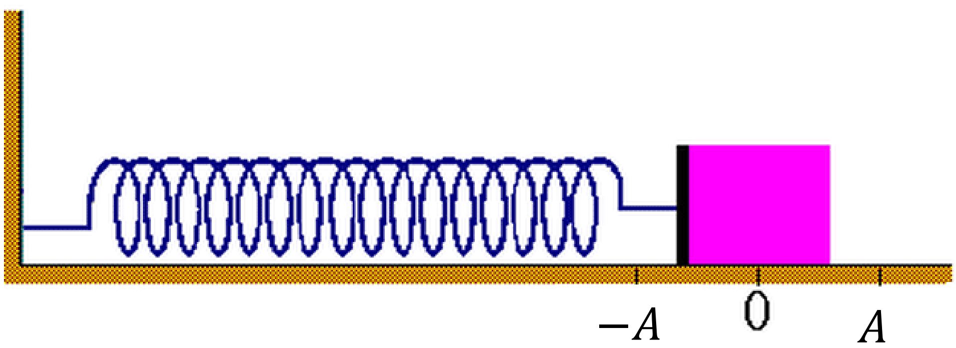
Διάγραμμα ενέργειας-χρόνου

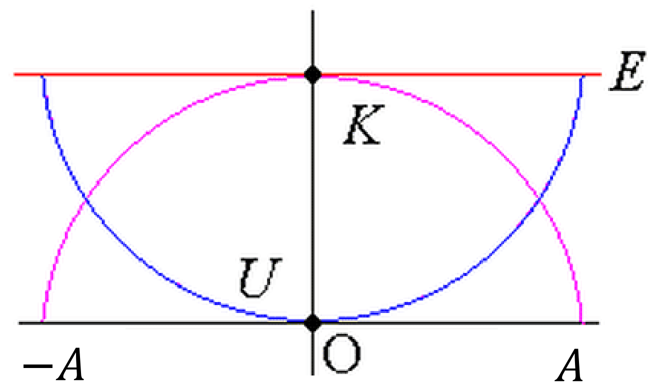
Διάγραμμα ενέργειας-μετατόπισης

Απλή Αρμονική Ταλάντωση

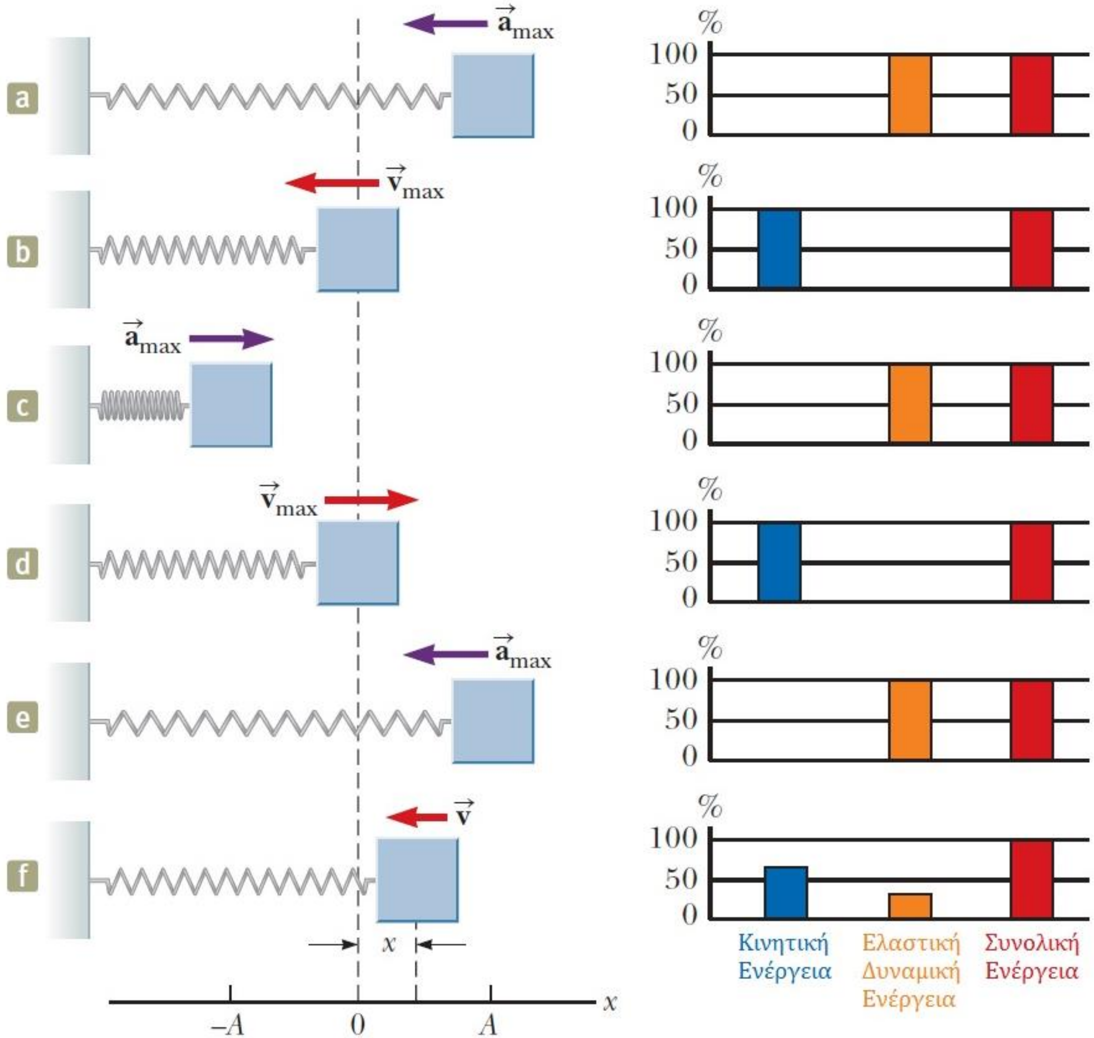
- **Ενέργεια Απλού Αρμονικού Ταλαντωτή**
  - Μηχανική Ενέργεια $K + U$

$$E_{mech} = K + U = \frac{1}{2}kA^2$$





Απλή Αρμονική Ταλάντωση

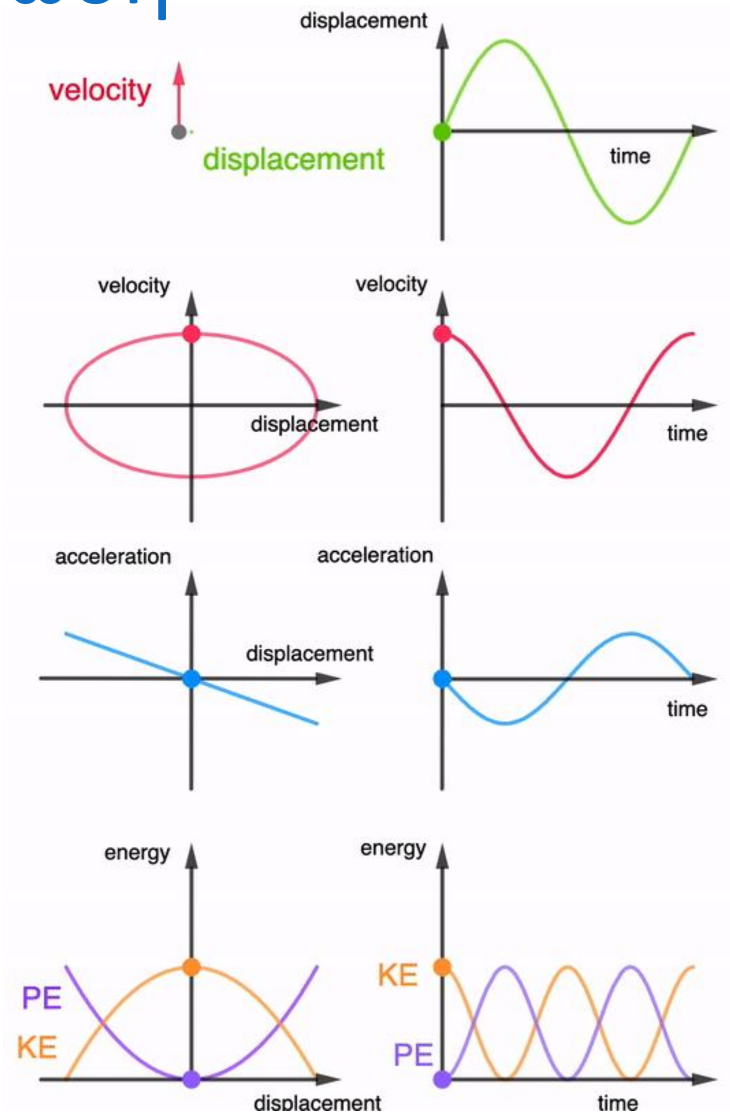


t	x	v	a	K	U
0	A	0	$-\omega^2 A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$
$\frac{T}{4}$	0	$-\omega A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$	0
$\frac{T}{2}$	$-A$	0	$\omega^2 A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$
$\frac{3T}{4}$	0	ωA	0	$\frac{1}{2}kA^2$	0
T	A	0	$-\omega^2 A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$
t	x	v	$-\omega^2 x$	$\frac{1}{2}mv^2$	$\frac{1}{2}kx^2$

Απλή Αρμονική Ταλάντωση

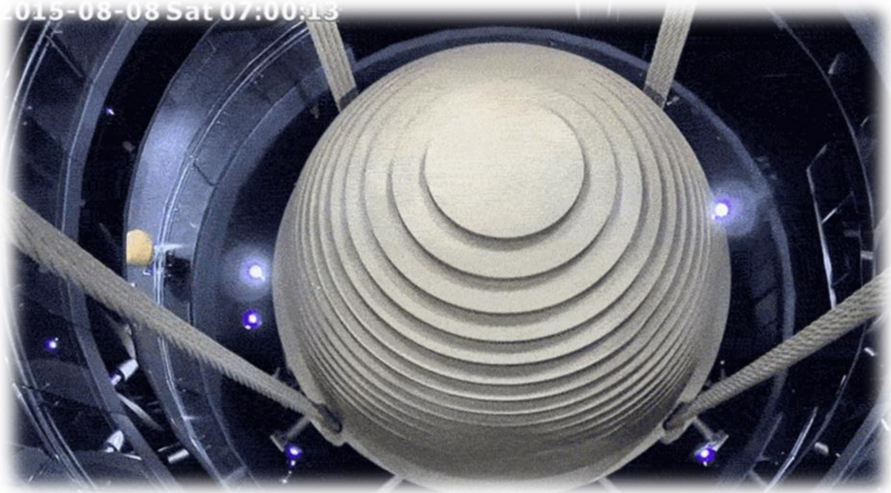
- **Ενέργεια Απλού Αρμονικού Ταλαντωτή**

$$E_{mech} = K + U = \frac{1}{2}kA^2$$



Απλή Αρμονική Ταλάντωση

- **Παράδειγμα:**
- Πολλά ψηλά κτήρια έχουν αποσβεστήρες μάζας, οι οποίοι είναι συσκευές που εμποδίζουν το κτήριο να ταλαντωθεί ισχυρά από τη δύναμη του ανέμου. Έστω ότι η συσκευή έχει μάζα $m = 2.72\ x\ 10^5$ kg και έχει σχεδιαστεί να ταλαντώνεται σε συχνότητα $f = 10.0$ Hz, με πλάτος $A = 0.2$ m.
  - Α) Βρείτε την ολική μηχανική ενέργεια του συστήματος.
  - Β) Ποια είναι η ταχύτητα του σώματος όταν περνά από το σημείο ισορροπίας?



Απλή Αρμονική Ταλάντωση

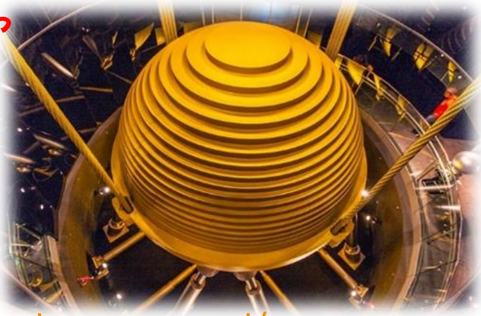
- **Παράδειγμα – Λύση:**
  - Συσκευή μάζας $m = 2.72\ x\ 10^5$ kg, ταλαντώνεται σε συχνότητα $f = 10$ Hz, με πλάτος $A = 0.2$ m.
    - A) Βρείτε την ολική μηχανική ενέργεια του συστήματος.
    - B) Ποια είναι η ταχύτητα του σώματος όταν περνά από το σημείο ισορροπίας?

A) Θεωρώντας το σύστημα {μάζα, σχοινιά} ως απλό αρμονικό ταλαντωτή, ξέρουμε ότι $E_{MECH} = \frac{1}{2}kA^2$ (1). Ξέρουμε ότι $\omega = 2\pi f = 2\pi 10\ \frac{rad}{s}$, και $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \omega^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow k = \omega^2 m = (2\pi 10)^2 m = 4\pi^2 \cdot 100 \cdot 2.72 \cdot 10^5\ \frac{N}{m} \Rightarrow$

$\Rightarrow k \cong 1.073 \cdot 10^9\ \frac{N}{m}$. Άρα (1) $\Rightarrow E_{MECH} = \frac{1}{2}kA^2 \cong 2.14 \cdot 10^7$ J

B) Στη θέση ισορροπίας, η ταχύτητα του σώματος είναι μέγιστη, και όλη η E_{MECH} έχει μετατραπεί σε κινητική! Άρα $K_{Θ.Ι} = E_{MECH} \Leftrightarrow \frac{1}{2}m u_{Θ.Ι}^2 =$

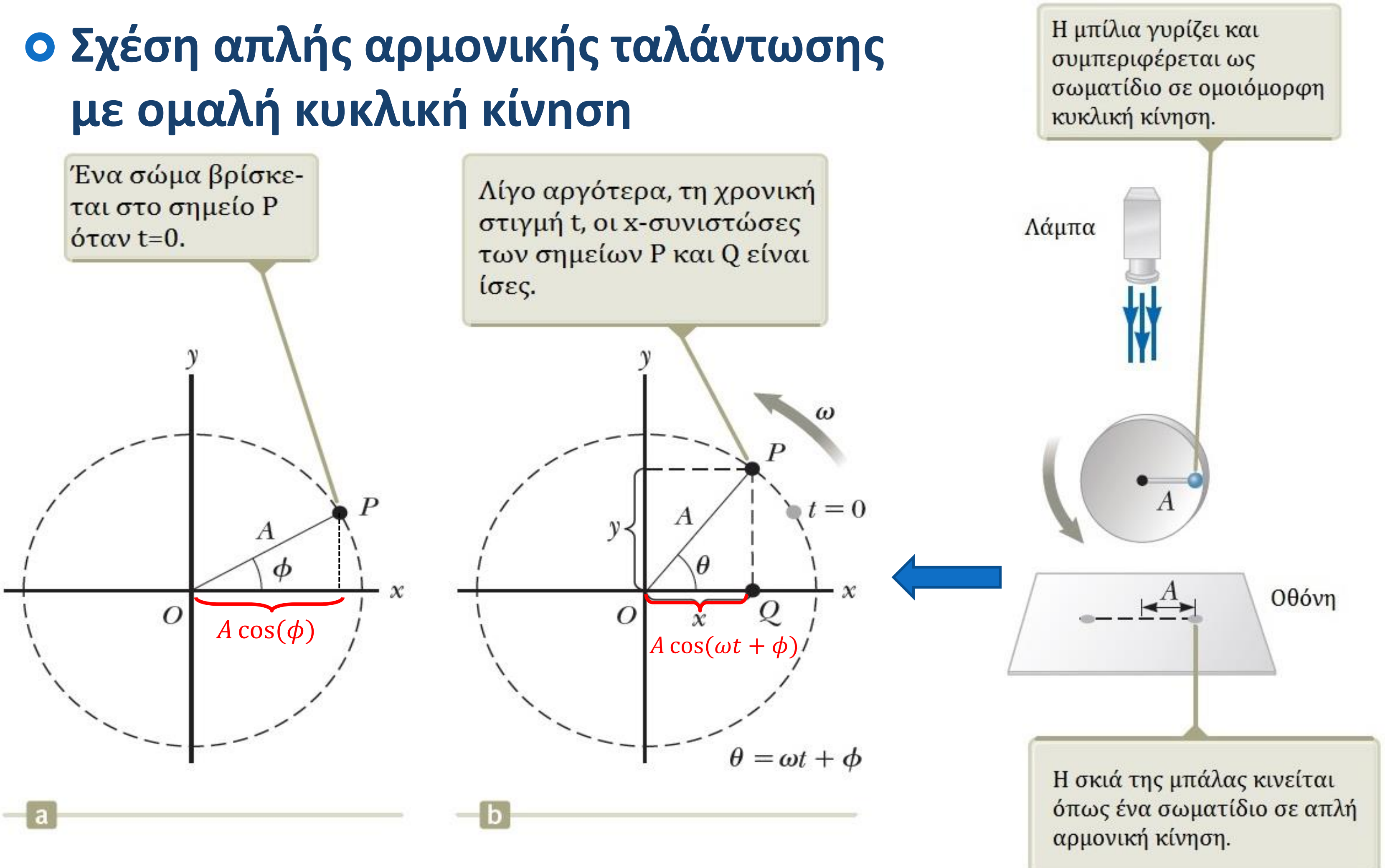
$= 2.14 \cdot 10^7 \Rightarrow u_{Θ.Ι} \cong 12.6\ \frac{m}{s}$



https://www.popularmechanics.com/technology/design/a16819/tapei-101-mass-damper-record/

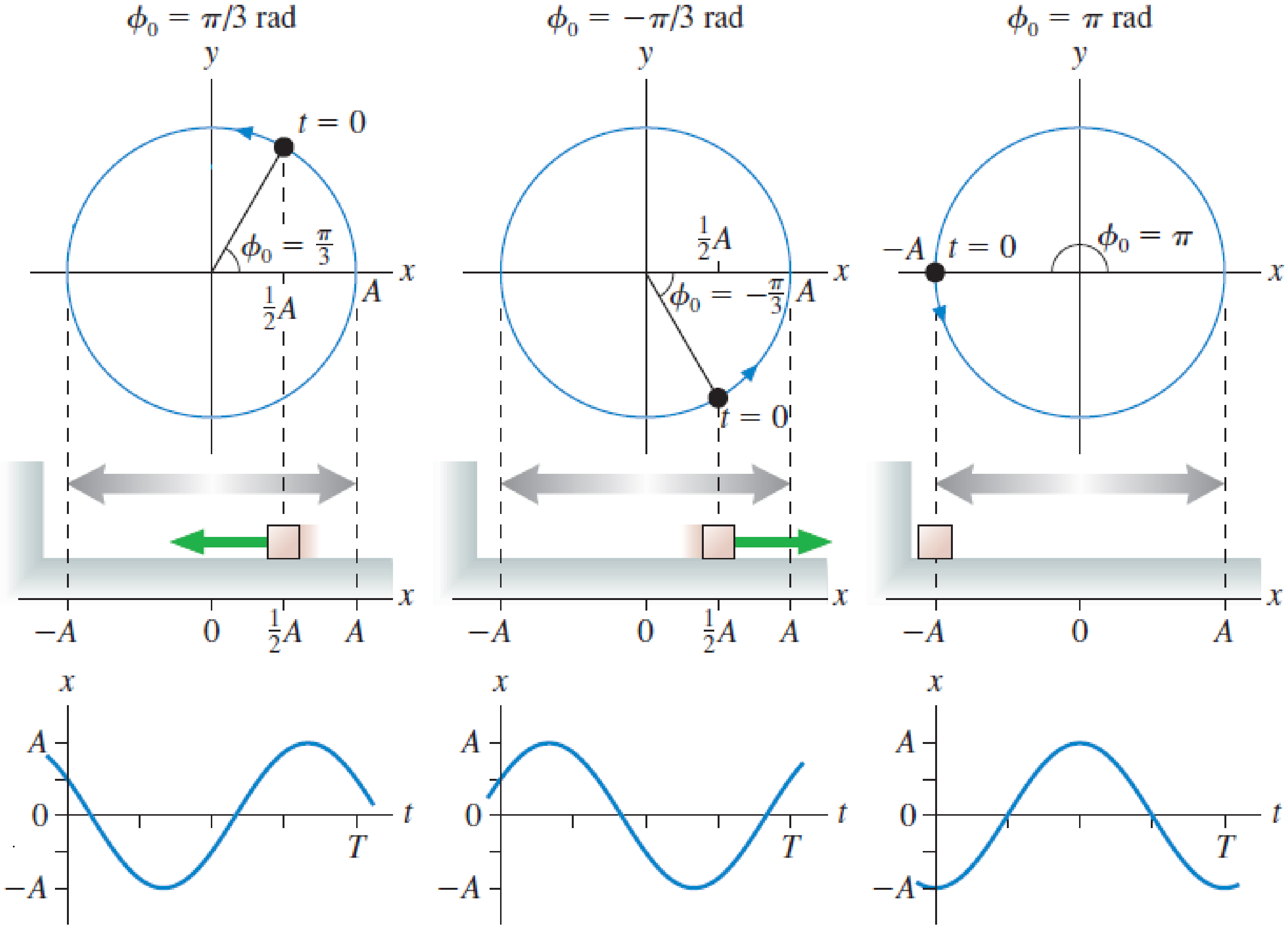
Απλή Αρμονική Ταλάντωση

- **Σχέση απλής αρμονικής ταλάντωσης με ομαλή κυκλική κίνηση**



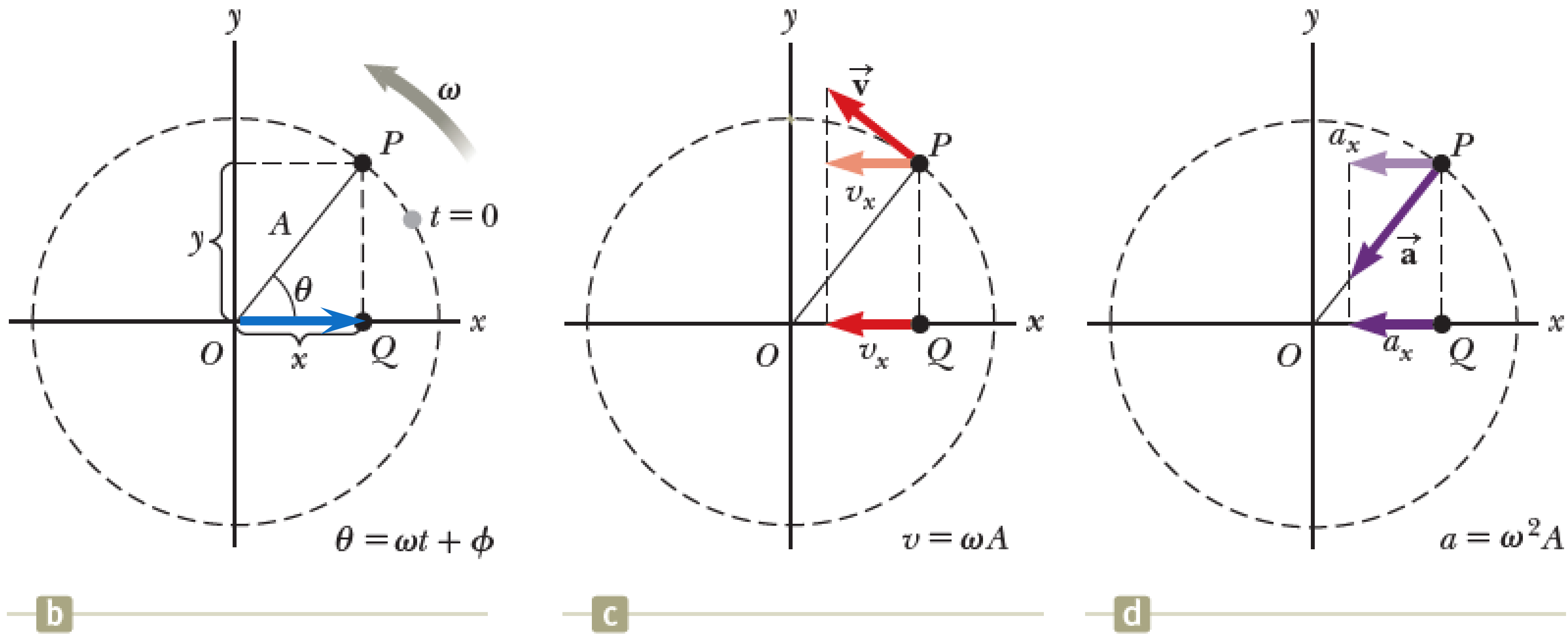
Απλή Αρμονική Ταλάντωση

- **Σχέση απλής αρμονικής ταλάντωσης με ομαλή κυκλική κίνηση**



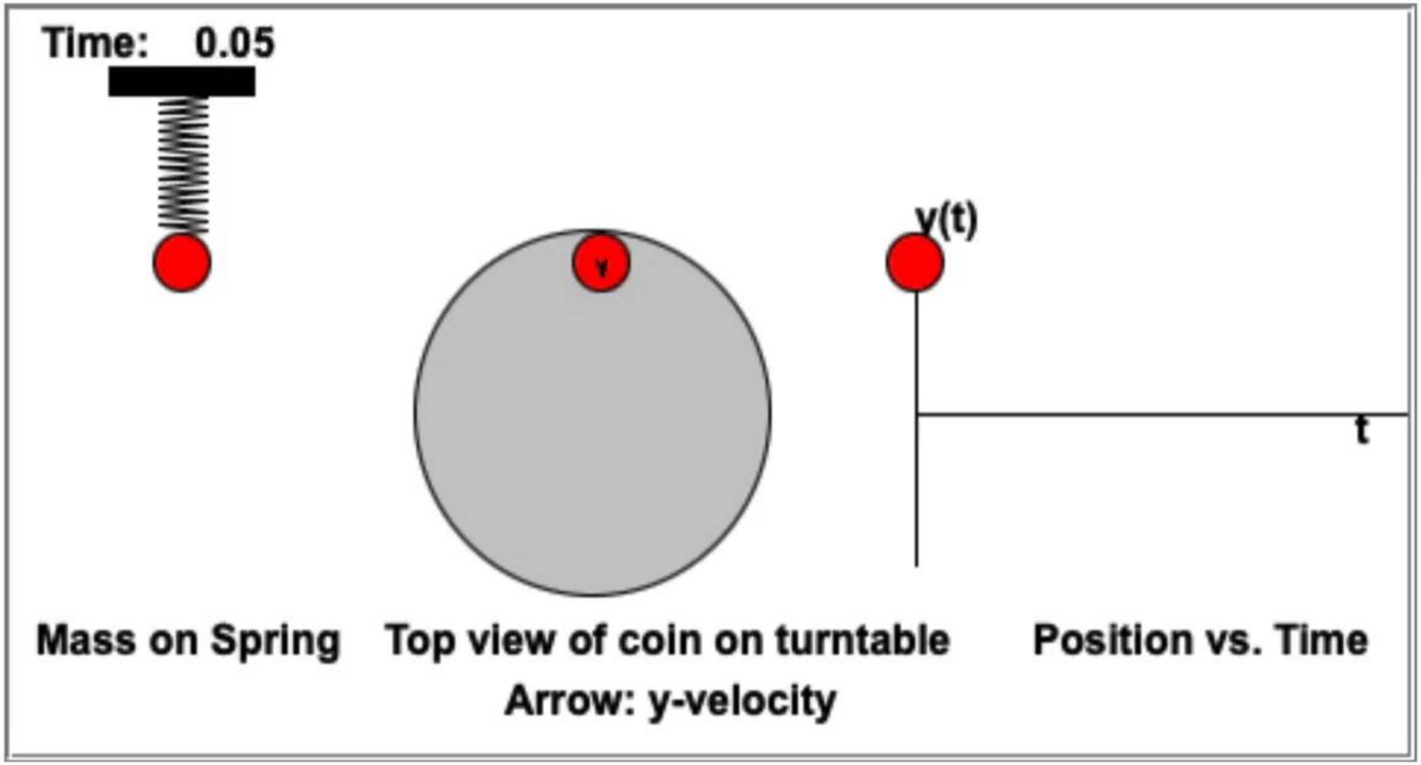
Απλή Αρμονική Ταλάντωση

- **Σχέση απλής αρμονικής ταλάντωσης με ομαλή κυκλική κίνηση**



Απλή Αρμονική Ταλάντωση

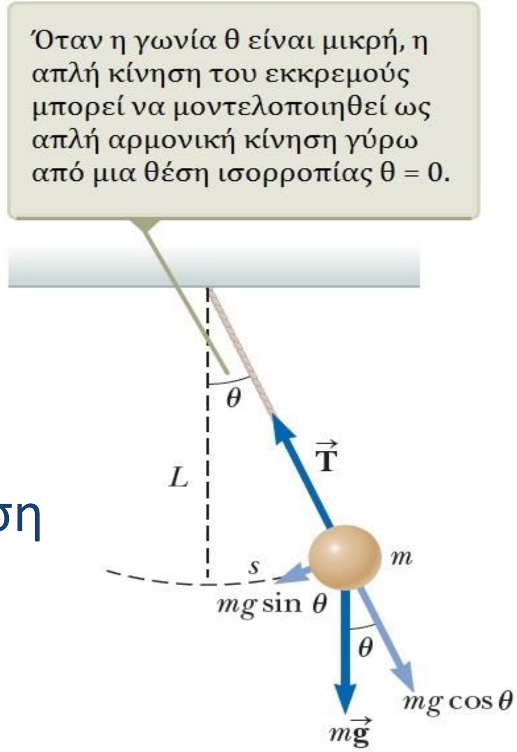
- **Σχέση απλής αρμονικής ταλάντωσης με ομαλή κυκλική κίνηση**



Απλή Αρμονική Ταλάντωση

- **Το εκκρεμές**
  - Όταν η γωνία θ είναι $< 10^o$, τότε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το εκκρεμές εκτελεί ΑΑΤ
  - Ας κατασκευάσουμε τη διαφορική εξίσωση

$$\vec{F}_{\varepsilon\pi} = m\vec{a}_x \Longrightarrow -mg\sin(\theta) = m\frac{d^2 s}{dt^2}$$



  - Επειδή $s = L\theta$,

$$L\frac{d^2\theta}{dt^2} = -g\sin(\theta) \Leftrightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\sin(\theta)$$

  - Χρησιμοποιώντας την προσέγγιση

$$\sin(\theta) \approx \theta$$

για μικρές τιμές του θ (σε rad), έχουμε: $$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\theta$$

Απλή Αρμονική Ταλάντωση

- **Το εκκρεμές**
  - Γιατί χρειαστήκαμε την προσέγγιση;
  - Θυμηθείτε για το {ελατήριο, σώμα} που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

  - Για το εκκρεμές, καταλήξαμε σε:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\theta$$

  - Η διαφορική εξίσωση που περιγράφει την κίνηση είναι ίδια!!
  - Άρα το εκκρεμές μπορεί να θεωρηθεί ότι εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση **για μικρό** $\boldsymbol{\theta}$ $(< \mathbf{10^o})$!

Απλή Αρμονική Ταλάντωση

- **Το εκκρεμές**

  - **Γωνιακή συχνότητα**

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

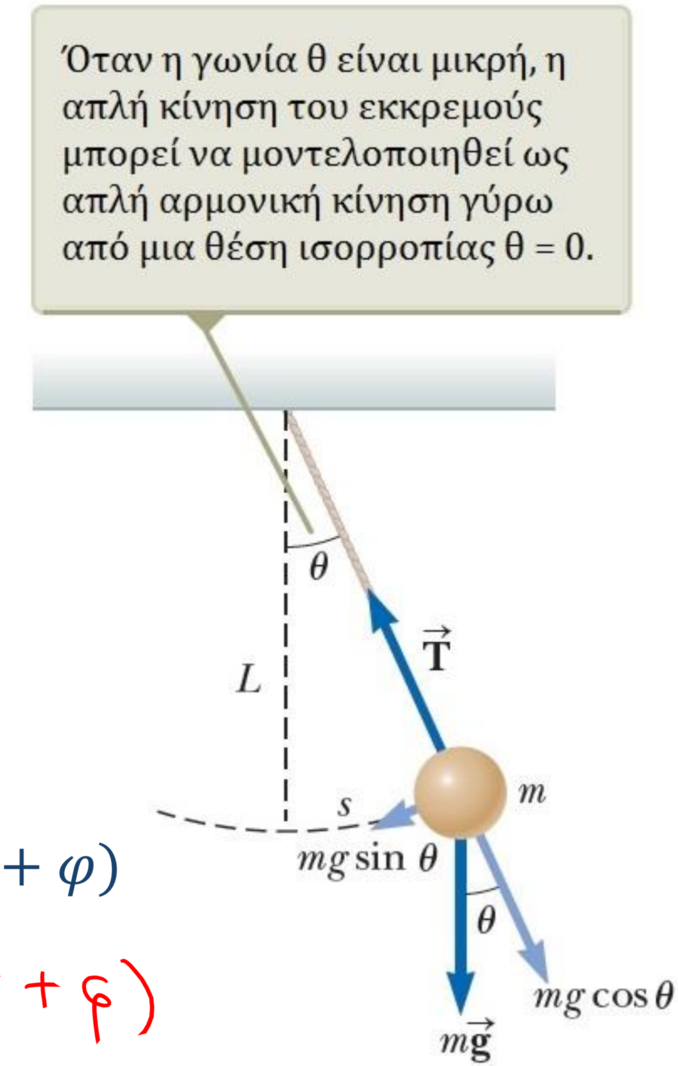
  - **Περίοδος**

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

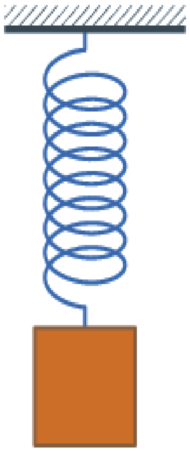
  - **Εξίσωση κίνησης**

$$\theta(t) = \theta_{max}\cos(\omega t + \varphi)$$

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$



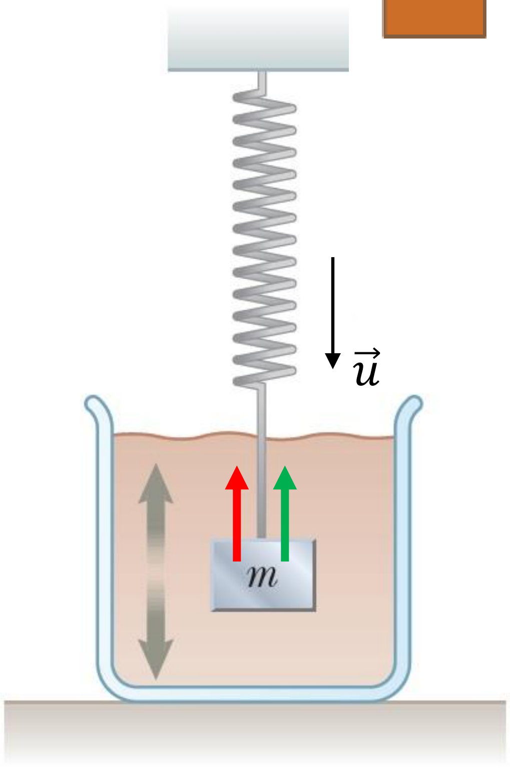
Απλή Αρμονική Ταλάντωση



- **Φθίνουσες ταλαντώσεις**
  - Όταν η μηχανική ενέργεια φθίνει με το χρόνο, τότε η κίνηση λέγεται ότι είναι **φθίνουσα ταλάντωση**
    - Πιο κοντά στην πραγματικότητα:
      - τριβές, αντίσταση αέρα
  - **Δύναμη επιβράδυνσης**

$$\vec{R} = -b\vec{u} = -b\frac{d\vec{x}}{dt}$$

    - Συντελεστής απόσβεσης b
    - Δρα πάντα ***αντίθετα στην ταχύτητα*** του σώματος
  - $\vec{F} = -k\vec{x}$: δύναμη επαναφοράς



Απλή Αρμονική Ταλάντωση

- **Φθίνουσες ταλαντώσεις**
  - Εφαρμόζοντας το 2ο νόμο του Newton:

$$\sum F_x = -kx - bu = ma_x$$

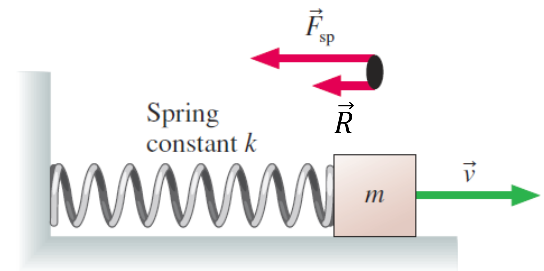
$$-kx - b\frac{dx}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

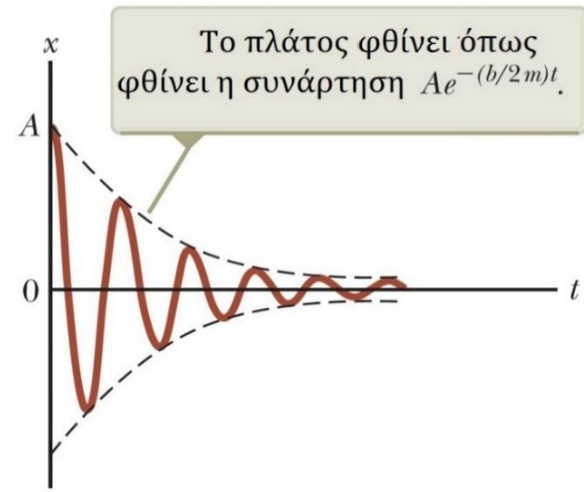
  - Η λύση της διαφορικής εξίσωσης

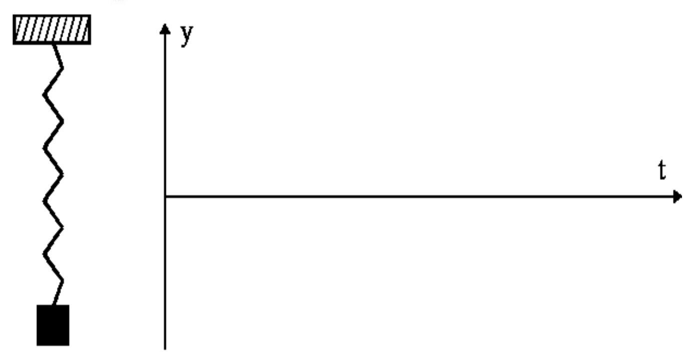
$$x(t) = Ae^{-\left(\frac{b}{2m}\right)t}\cos(\boldsymbol{\omega} t + \varphi)$$

  - Εναλλακτικά,

$$x(t) = A(t)\cos(\boldsymbol{\omega} t + \varphi)$$







Απλή Αρμονική Ταλάντωση

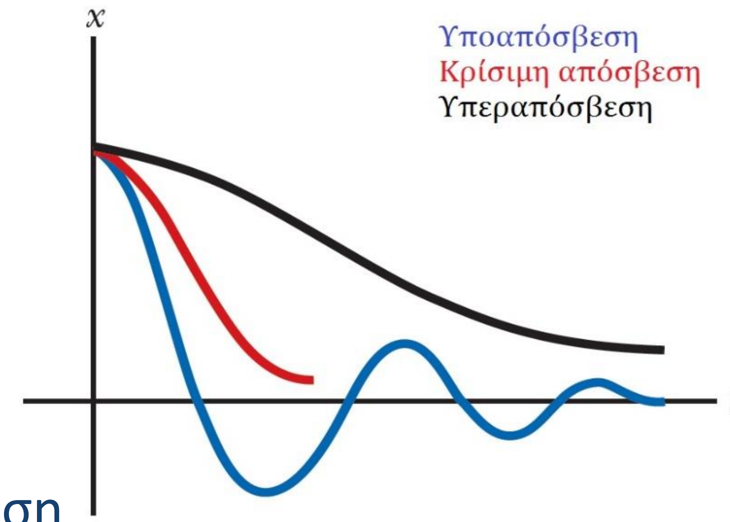
- **Φθίνουσες ταλαντώσεις**
  - Γωνιακή συχνότητα $\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$
  - Η ποσότητα $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ είναι η γωνιακή συχνότητα απουσία απόσβεσης
  - Άρα $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$ και λέγεται

φυσική συχνότητα (ή ιδιοσυχνότητα)

του συστήματος

Απλή Αρμονική Ταλάντωση

- **Φθίνουσες ταλαντώσεις**

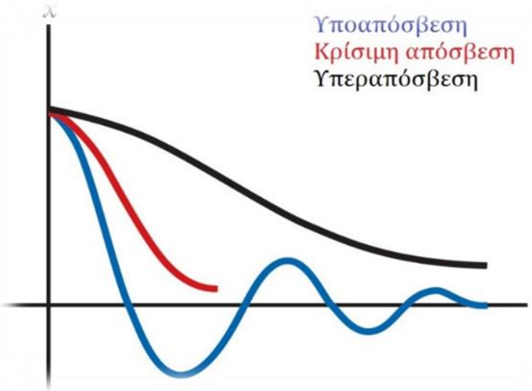


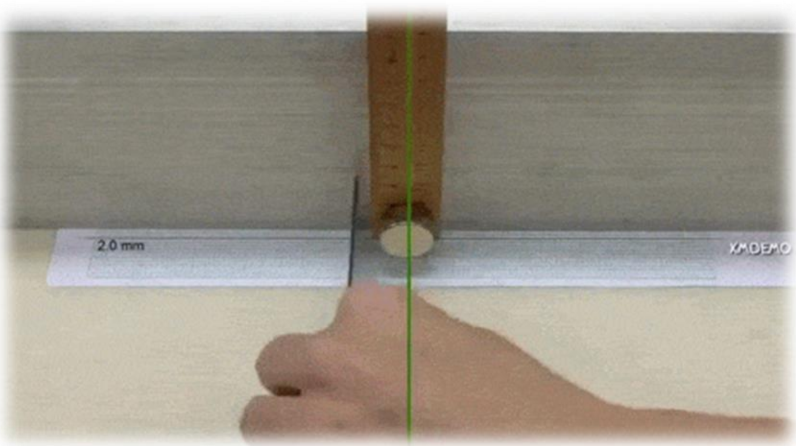
$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

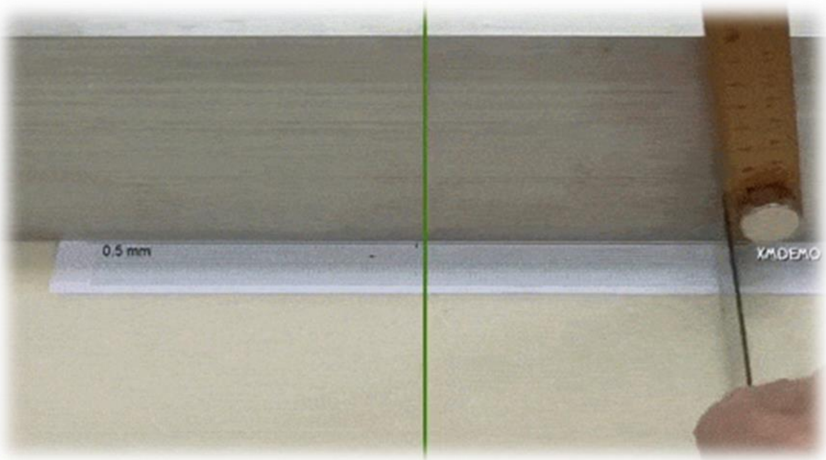
- Αν $\frac{b}{2m} < \omega_0 \rightarrow$ υποαπόσβεση
- Αν $\frac{b}{2m} = \omega_0 \rightarrow$ κρίσιμη απόσβεση
- Αν $\frac{b}{2m} > \omega_0 \rightarrow$ υπεραπόσβεση
  - Για συστήματα κρίσιμης απόσβεσης ή υπεραπόσβεσης, η εξίσωση φθίνουσας ταλάντωσης $x(t) = Ae^{-\left(\frac{b}{2m}\right)t}\cos(\omega t + \varphi)$ που βρήκαμε δεν ισχύει.

Απλή Αρμονική Ταλάντωση

- **Φθίνουσες ταλαντώσεις**







Απλή Αρμονική Ταλάντωση

- **Φθίνουσες ταλαντώσεις – Μηχανική Ενέργεια**

- Η μηχανική ενέργεια του φθίνοντα ταλαντωτή είναι

$$E_{mech} = \frac{1}{2} m A^2 \omega_0^2 e^{-\frac{b}{m}t} \left[1 + \frac{b}{2m\omega_0} \cos\left(2\omega t - \tan^{-1} \frac{2m\omega}{b} \right) \right]$$

- Για $\frac{b}{m} \ll \omega_0$, έχουμε

$$E_{mech} \approx \frac{1}{2} m A^2 \omega_0^2 e^{-\frac{b}{m}t}$$

που δείχνει ότι πράγματι η μηχανική ενέργεια του ταλαντωτή φθίνει εκθετικά με την πάροδο του χρόνου

Απλή Αρμονική Ταλάντωση

- **Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις**
  - Μπορούμε να αντισταθμίσουμε την απώλεια μηχανικής ενέργειας της ταλάντωσης λόγω της δύναμης επιβράδυνσης
    - Ασκώντας μια περιοδική εξωτερική δύναμη στο σύστημα
    - Π.χ. παιδί που κάνει κούνια και ο πατέρας το σπρώχνει περιοδικά για να διατηρήσει την κίνηση του
    - Π.χ. στον έμφωνο στάσιμο λόγο
    - Π.χ. στα μουσικά όργανα
    - Π.χ. σε ηλεκτρικά κυκλώματα
  - Μοντέλο εξωτερική δύναμη διέγερσης: $F(t) = F_0 \sin(\omega t)$
  - Τότε

$$\sum F_x = m a_x \Leftrightarrow F_0 \sin(\omega t) - b\frac{dx}{dt} - kx = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

Απλή Αρμονική Ταλάντωση

- **Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις**

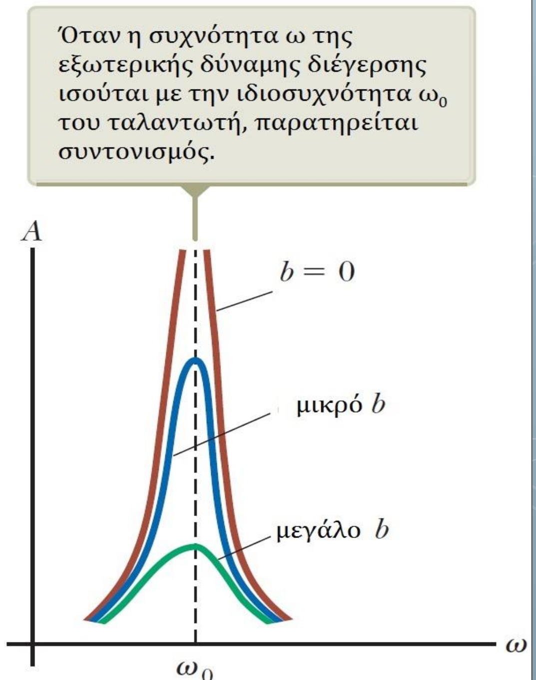
$$\sum F_x = ma_x \Leftrightarrow F_0 \sin(\omega t) - b\frac{dx}{dt} - kx = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

- Λύση:

$$x(t) = A(\omega)\cos(\omega t + \varphi)$$

με

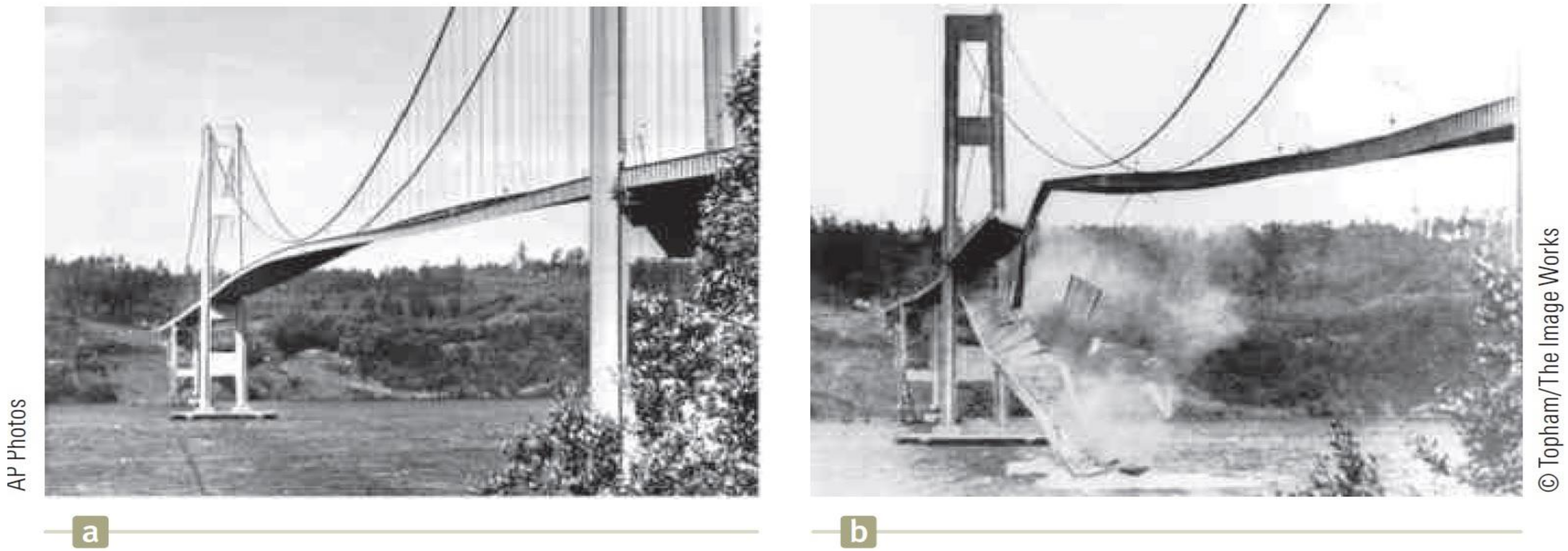
$$A(\omega) = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega^2 - {\omega_0}^2)^2 + \left(\frac{b\omega}{m}\right)^2}}$$



- **Συντονισμός:** Όταν $\omega \approx \omega_0$ το A γίνεται πολύ μεγάλο
  - ω_0: **συχνότητα συντονισμού**

Απλή Αρμονική Ταλάντωση

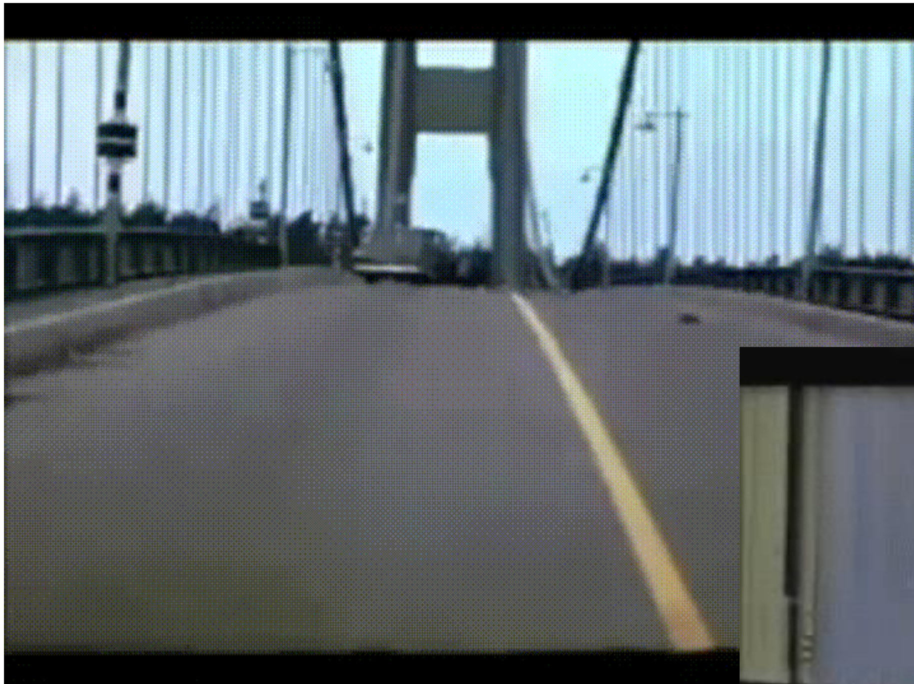
- **Παραδείγματα – Μηχανική:**



- Η αρχική υπόθεση ήταν ότι ο κυματισμός του ανέμου στο οδόστρωμα δημιούργησε περιοδική δύναμη διέγερσης με συχνότητα ίση με τη συχνότητα συντονισμού της γέφυρας. Το πλάτος ταλάντωσης της γέφυρας αυξήθηκε πολύ με αποτέλεσμα την κατάρρευσή της.

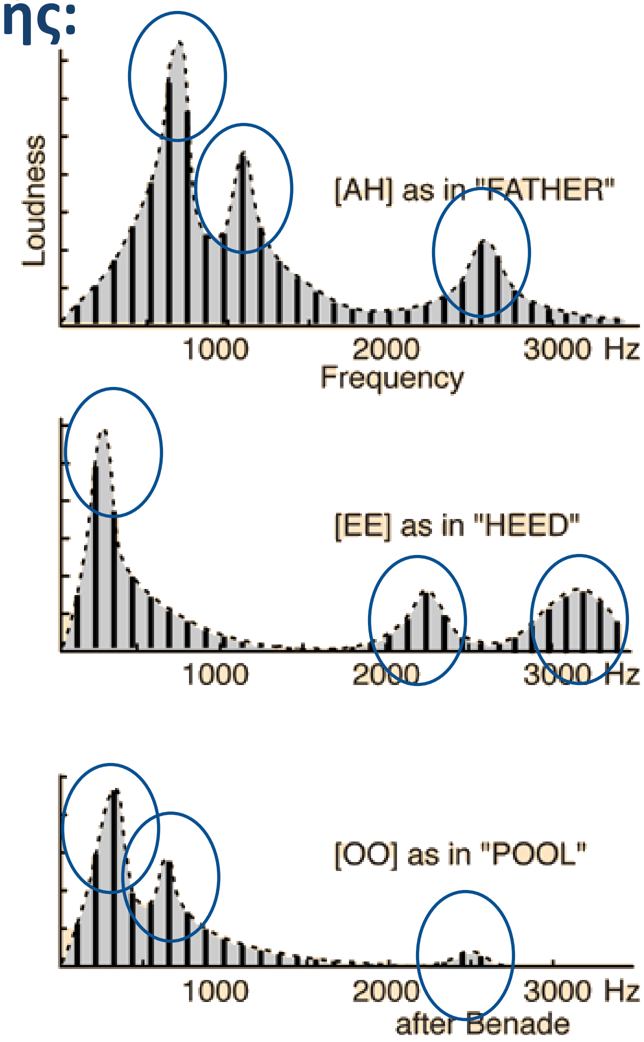
https://en.wikipedia.org/wiki/Tacoma_Narrows_Bridge

Απλή Αρμονική Ταλάντωση



Απλή Αρμονική Ταλάντωση

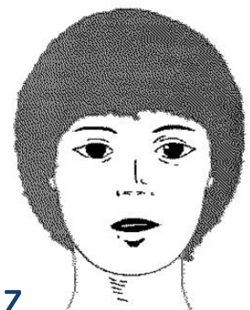
- **Παραδείγματα – Παραγωγή Φωνής:**
  - Διαφορετικές συχνότητες συντονισμού για τα δια-φορετικά φωνήματα
    - /ου/, /α/, /ι/
  - **Φωνοσυντονισμός** (formant)
    - Υψηλά πλάτη σε περιοχές συγκεκριμένων συχνοτήτων
    - Οι περιοχές αυτές εξαρτώνται από τη διάταξη της φωνητικής οδού

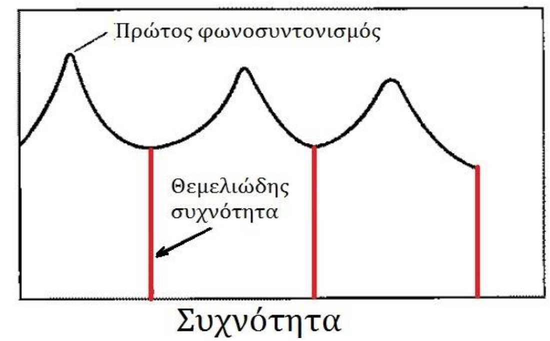


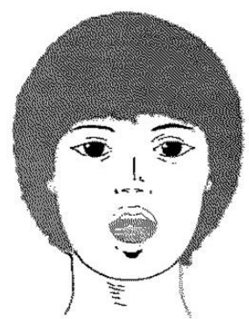
https://en.wikipedia.org/wiki/Formant

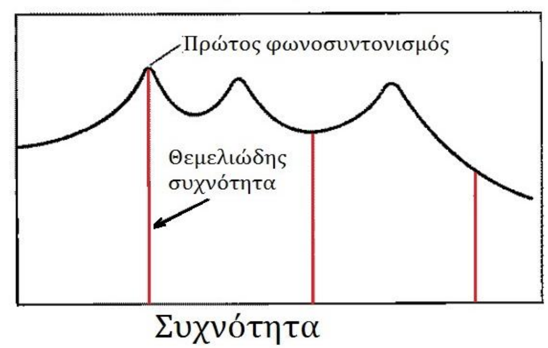
Απλή Αρμονική Ταλάντωση

- **Παραδείγματα – Παραγωγή Φωνής:**
  - Οι σοπράνο προσπαθούν να «φτιάξουν» τη φωνητική οδό τους έτσι ώστε η συχνότητα φωνοσυντονισμού να συμπίπτει με τη θεμελιώδη συχνότητα της φωνής τους, όταν θέλουν να παράξουν δυνατή φωνή (Σχήμα)
  - Επίσης, με διαφορετική διαμόρφωση της φωνητικής οδού μπορούν να «φτιάξουν» ένα φωνοσυντονισμό στην περιοχή συχνοτήτων $2500 - 3000$ Hz, όπου τα μουσικά όργανα συνήθως δεν έχουν ενέργεια, ώστε να ακούγονται περισσότερο αυτοί παρά τα μουσικά όργανα









Τέλος Διάλεξης